彭·高数

高等数学期中试题集

（2019版）

彭康书院课外学业辅导学友互助团

目录

2018 年高数上期中试题

一、 选择题

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2 g(x) & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续　　C. 连续但不可导　　D. 可导

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^2-x\right|$ 不可导点的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（　　）

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. -2　　B. 1　　D. -1

6. 在区间 (a,b) 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 的图像在 (a,b) 内是（　　）

A. 单增且凸　　B. 单减且凸　　B. 单增且凹　　D. 单减且凹

二、 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

2. 设 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求 dy.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cot x-\frac{1}{x})$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$，求 $y'(0)$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+9t \\ y=t^2-2t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 证明：当 $x>0$ 时，$e^x-1<xe^x$.

7. 求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 的最大值，其中 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b & x\le 0 \\ \sin ax & x>0 \end{cases}$，问 a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？并求 $f'(x)$.

9. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求：

（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间、拐点及渐近线方程.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f'''(\eta)\ge 3$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：在 $[0,1]$ 存在两点 x_1，x_2，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

2017 年高数上期中试题

一、 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{x}}=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{n}+3^{n}}=$__________.

3. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'(0)=$________________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ b(1-x^{2}) & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则 $a=$_______，$b=$________.

5. 已知 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^{3}+bx^{2}$ 的拐点，则 $a=$_______，$b=$________.

二、 选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+2\sin x)$ 与下列哪个表达式是等价无穷小（　　）

   A. $1+2\sin x$　　B. x　　C. $2x^{2}$　　D. $2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^{2}} & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

   A.极限不存在　　B.极限存在但不连续　　C.连续　　D.以上结论都不成立

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）

   A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\ne 0$　　C. 取得极大值　　D. 取得极小值

4. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^{2}(x-3)^{3}(x-4)^{4}$ 的拐点是（　　）

   A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

三、 解答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

2. 设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 y'.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

4. 设 $y^x=e^{x+y}$，求 dy.

5. 设 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

6. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\dfrac{\pi}{2}x)} & x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点类型.

8. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

2016年高数上期中试题

一、 填空题

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$________.

2. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\ne 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$__________.

3. 曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 的凸区间是________________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$________.

5. 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为__________________.

二、 选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

A. $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　B. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

C. $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

2. 设 $f(x)$ 为可导函数且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. -2

3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处（　　）

A. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\ne 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A.极限不存在　　B.极限存在，但不连续

B.连续，但不可导　　D.可导

5. 下列命题中正确的是（　　）

A. 若 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值

C. 若 $f(x)$ 可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值，则最大值一定是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值

三、　计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 设 $y=\tan 2x + 2^{\sin x}$，求 $dy\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x<0 \\ \sin\dfrac{1}{x^2-4}, & x\ge 0\end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点的类型.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$， $g'(0)=-1$.

（1）求 $f'(x)$.（2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

6. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求：（1）函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且 $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$ 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)\geq 3$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\xi-\eta}(f(\eta)-f'(\eta))=1$.

2015 年高数上期中试题

一、 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则常数 a 与 b 应满足______________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^x-1}{x\sin x}=$______________.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\ne -1)$ 的斜渐近线方程为____________________.

4. 函数 $y=xe^{-x}$ 的凸区间是________________.

5. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$，则 $a=$___________.

二、 选择题

1. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义， $f(x)$ 为连续函数且 $f(x)\ne 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（　　）

   A. $f(\varphi(x))$ 必有间断点　　B. $\varphi(x)/f(x)$ 必有间断点

   C. $\varphi(f(x))$ 必有间断点　　D. $(\varphi(x))^2$ 必有间断点

2. 设函数 $f(x)$ 可导且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为（　　）

   A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x)=($　　$)$，$(n>2)$

   A. $[f(x)]^{2n}$　　B. $(n!)[f(x)]^{2n}$　　C. $(n!)[f(x)]^{n+1}$　　D. $n[f(x)]^{n+1}$

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是（　　）

   A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

5. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在点 $x=a$ 处（　　）

   A. $f(x)$ 取得极小值　　B. $f(x)$ 的导数不存在

   C. $f'(a)$ 存在，且 $f'(a)\ne 0$　　D. $f(x)$ 取得极大值

三、 计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}$.

2. 设 $y=(\arcsin\frac{1}{x})^3$.求 y'.

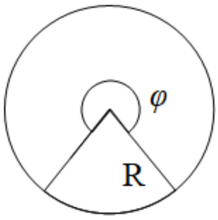
3. 求曲线 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

4. 求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$.

   ①求 $\varphi(x)$ 及其定义域；②求 $\varphi'(-1)$.

6. 如图，从半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗，留下的扇形的中心角 φ 取多大时做成的漏斗的容积最大？



7. 设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0,$ 证明：

（1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导， $f(a)>0, f'(a)<0, x>a$ 时 $f''(x)<0,$ 证明： $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上有且只有一个实根.

2014 年高数上期中试题

一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}+n-\sqrt{n^2-n})=$__________.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\sin x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 的间断点是 $x=$__________.

3. 设函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，则 $y^{(2014)}(0)=$__________.

4. 已知函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta f=(\arctan x^2)\Delta x+o(\Delta x)$，又 $y=f(2x-1)$，则

$dy|_{x=0}=$________.

二、选择题

1. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则（　　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

C. $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限至少有一个存在　　D. $\{a_n\},\{b_n\}$ 的极限可能都不存在

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to 0$ 时（　　）

A. $f(x)$ 存在有限极限　　B. $f(x)$ 无极限，但有界

C. $f(x)$ 无界，但不是无穷大　　D. $f(x)$ 是无穷大

3. 当 $x\to 0$ 时，与 $\ln(\cos x+2x^2)$ 等价无穷小的是（　　）

A. $\dfrac{x^2}{2}$　　B. x^2　　C. $\dfrac{3x^2}{2}$　　D. $2x^2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内可导，且 $f(0)=0, f'(0)>0$，则 $\exists\delta>0$，使得（　　）

A. 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f'(x)>0$　　B. 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>0$

C. 对 $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f'(x)>0$　　D. 对 $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>0$

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且对于 $\forall x\in R$ 满足 $x^2f''(x)+x^2(f'(x))^3=1-\cos x, f'(0)=0$ 则（　　）

A. 必 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B. $x=0$ 必是 $f(x)$ 的极大值点

C. (0，$f(0)$) 必是曲线的拐点　　D. 不能判断原点是 $f(x)$ 的极值点还是拐点

三、判断题（命题正确需给出证明，命题错误需举出反例）

1. 设 $a<b$ 若 $\forall\delta\in(0,\dfrac{b-a}{2})$，有 f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上一致连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续.

2. 设可微函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸函数，则函数 f 的图形必位于曲线过 $(a,f(a))$ 切线的上方，即对任意 $x\in(a,b]$ 有 $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$.

四、计算题

1. 设 $x_1=\dfrac{1}{2L},L>0,x_{n+1}=x_n(2-Lx_n),n=1,2,\cdots$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设方程 $e^{xy}+\sin x-y=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

3. 试确定常数 a,b，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos2x+b\cos4x}{x^4}$ 存在，并求出极限值.

五、证明题

1. 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

（2）对 $\forall\lambda\in R$，必 $\exists\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(x)$ 的每一个零点都是简单零点（简单零点：若 $f(x_0)=0$，则 $f'(x_0)\neq 0$），证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点.

2013 年高数上期中试题

一、填空题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}=9$,则 $a=$__________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0\end{cases}$ 当 $a=$______，$b=$______时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$______，第二类间断点 $x=$_______.

4. 已知当 $x\to 0$，$\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

5. 设 $y=\log_a[x(\sec x+\tan x)]$，则 $dy=$_________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})\bullet\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}=$__________.

7. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为__________.

二、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin x}$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}(n\in N_+)$，试证明$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

4. 设$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}$，说明其导函数$f'(x)$在$x=0$处连续.

6. 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，试证明$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(x)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的领域内二阶可导，且 $f'(0)=0$，试计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界且可导，证明：方程 $f'(x)(1+x^2)=2xf(x)$ 至少有一个实根.

2012 年高数上期中试题

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$______________.

2. 设 $y=\cos^2(\frac{1-\ln x}{x})$，则 $y'=$______________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{(x+1)x^2} & x<0\\ \frac{x-1}{x^2+x-2} & x\geq 0\end{cases}$,则 $x=$_____是第一类间断点， $x=$______是第二类间断点.

4. 要使 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-2x)}{x} & x<0\\ a+1 & x=0\\ \frac{\sin bx}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，必须 $a=$________, $b=$________.

5. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是______________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+1}=$____________.

二、计算题

1. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\arctan\frac{x}{2}+\arcsin 2x$，求 $y'(0)$.

2. 设 $y=f(\sin x)\cdot\sin[f(x)]$，其中 $f(x)$ 设可导，求 dy.

3. 已知$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$，其中 f 为二阶可导，且 $f''(t) \neq 0$, 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 证明：当$x \geq 1$时，$\arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

5. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且 $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$, 证明： $f(x)$ 在（0,+∞）内有唯一零点.

6. 求 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的极值.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{1}{2^x}\sin e^x + [\ln(1+2^x)]\cdot\ln(1+\dfrac{3}{x})]$.

8. 若火车每小时所耗燃料费用与火车速度的立方成正比，已知速度为 20km/h 时，每小时的燃料费用为 40 元。其他费用每小时 200 元，求最经济的行驶速度.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，讨论导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

10. 求 $\ln x$ 在 $x=3$ 处带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0, \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.
证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使 $ef'(\xi)=1$.

2011 年高数上期中试题

一、填空题

1. 要使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-2x)}{x} & x<0\\ a+1 & x=0\\ \dfrac{\sin bx}{x} & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，必须 $a=$_______，$b=$________.

2. 设 $y=\cos^2(\dfrac{1-\ln x}{x})$，则 $y'=$______________________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2(x+1)} & x<0\\ \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & x\geq 0\end{cases}$ 则 $x=$_______是 $f(x)$ 的第一类间断点；$x=$_______是 $f(x)$ 的第二类间断点.

4. 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$_______，$b=$________.

5. 若 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\dfrac{1}{t})^{2tx}$，则 $f'(x)=$_________________.

6. 已知函数 $y=(x-5)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$，当 $x=$__________时，$y=$______为极小值，当 $x=$______时，$y=$_________为极大值.

二、计算题

1. 设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$,求$y'$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x^2+1)}{1-\cos(x)}$.

3. 已知$\begin{cases} x = f'(t) + 2 - \sin 3 \\ y = tf'(t) - f(t) + 3 \end{cases}$，其中 f 二阶可导，且 $f''(t) \neq 0$. 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设 $f(x)$ 满足方程 $xf''(x) + 3x^2[f'(x)]^2 = 1 - e^x$，且 $f(x)$ 具有二阶连续导数. 若 $f(x)$ 在 $x = \tau(\tau \neq 0)$ 处取得极值，问 $f(\tau)$ 必为极大值还是极小值，并证明你的结论.

5. 已知$\sin(xy) - \ln\dfrac{x+1}{y} = 1$, 求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - \cos x}{x} & x = 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0) = 1$.

（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

（2）求 $f'(x)$.

（3）讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

7. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比，当速度为 10km/h，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需 480 元，问轮船的速度多大时才能使 20km 航程的总费用最少？此时每小时的总费用等于多少？

三、证明题

1. 证明：（学习工科数学分析者做第(2)题，其余做(1)）

（1）当 $x \geq 1$时，$\arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}.$

（2）设 $0 < x < 1$，证明 $\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}.$

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $\max\limits_{0<x<1} f(x) = 1, \min\limits_{0<x<1} f(x) = 0.$.证明：至少存在一点 $\varsigma \in (0,1),$ 使 $f''(\varsigma) > 2.$

2010 年高数上期中试题

一、填空题

1. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$_______.

2. 曲线 $y=xe^{2x}$ 的拐点是_______.

3. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

4. 曲线由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，则曲线在 t=0 的切线方程为________________.

5. 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})\quad (x>0)$ 的渐近线方程为________________.

二、选择题

1. $x=2$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{2-x}$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & ,x>0\\ x^2g(x) & ,x\leq 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续　　C. 连续但不可导　　D. 可导

3. 在区间 (a,b) 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是（　　）

A. 单增凸　　B. 单减凹　　C. 单增凹　　D. 单减凹

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-1$,则在点 $x=a$ 处（　　）

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　B. $f(x)$ 取得极大值

B. $f(x)$ 取得极小值　　D. $f(x)$ 的导数不存在

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x})$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(\cos x)\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

3. 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 的导数.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

5. 求函数 $\ln x$ 在 $x=2$ 处带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(a)=0, g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a \\ A\quad, & x=a\end{cases}$.

（1）试确定 A 的值，使 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

（2）求 $g'(x)$.

（3）证明: $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

2. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $\left[0,2\right]$ 上, $f(x)=x(x^2-4)$.假若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.

（1）写出 $f(x)$ 在 $\left[-2,0\right]$ 上的表达式.

（2）当 k 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

3.设函数 $f(x),g(x)$ 都在 $[1,6]$ 上连续，在 $(1,6)$ 内可导，且 $f(1)=5, f(5)=1, f(6)=12$.

求证：至少存在一个点 $a\in(1,6)$ 使 $f'(a)+g'(a)[f(a)-2a]=2$.

本试题集由彭康学导团制作，试题改编自往年真题，部分题目已调整或删改，适合学习高数 1、高数 2、工科数学分析的机类、电类等专业使用，学习高数 3、高数 4 的专业仅供参考。如有打印店以此盈利，请勿购买。

彭康学导团 QQ 学习群请扫描左侧二维码：491330131

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描右侧二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。